Hamilton-út, Hamilton-kör, Dirac-tétel

-kombinatorika előadás jegyzet-

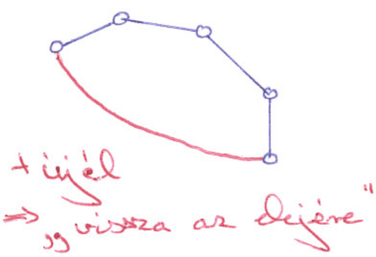
előadó: Hajnal Péter
előadás időpontja: 2014. 04. 14.
jegyzetet készítette: Bodó Sarolta

Emlékeztető:
G gráf, P út $\Leftrightarrow$ P olyan séta, amelyben nincs csúcsismétlés (mindig újabb és újabb csúcsokra jutunk).

P séta egy n pontú gráfban, akkor P séta hossza $\leq n-1$ (séta: $v_0, e_1, \ldots, e_\ell, v_\ell$; ekkor ℓ-edik, azaz utolsó él/lépés; ez az ℓ a séta hossza, illetve a meglátogatott csúcsok száma -1).

<u>Definíció:</u> n pontú gráfban P $n-1$ hosszú út, akkor P-t Hamilton-útnak nevezzük.

Emlékeztető:
Egy C kör a G gráfban:



$\Rightarrow$ ez esetben C egy speciális séta (ún. záródó (zárt) séta)

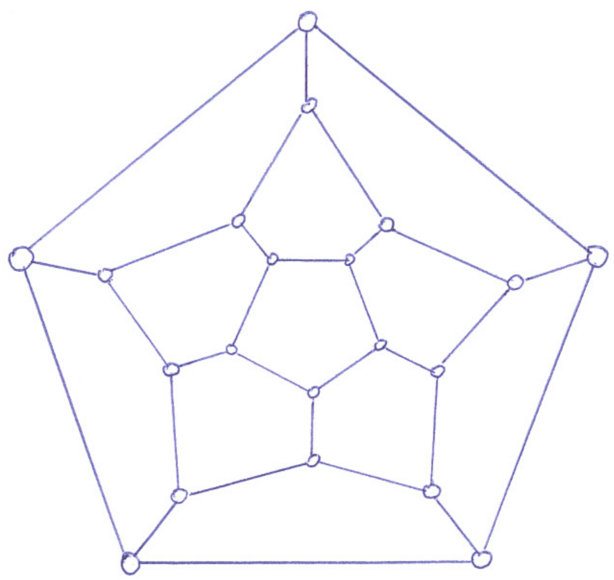
Észrevétel:
C kör egy n pontú gráfban, akkor C hossza $\leq n$

<u>Definíció:</u> C kör Hamilton-kör $\Leftrightarrow$ ha C hossza $= |V(G)|$.
(az összes csúcsot meglátogatja).

(háttérinformáció: William Rowan Hamilton egy 19. századi tudós volt, aki többek között jártas volt a fizikában, mechanikában, matematikában.)

1. Példa

(háttérinformáció: William Rowan Hamilton 1857-ben tervezett egy játékot, melynek célja egy Hamilton-kör megtalálása a dodekaéderben. A játék kora „bűvös kockája" volt.)



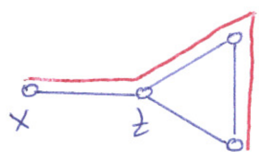
*Dodekaéder: 12 szabályos ötszög határolta szabályos test.

Dodekaéder gráfja:
- szabályos test
- csúcsok száma: $|V| = 20$
- lapok száma: 12
- 3-reguláris (azaz minden csúcsban 3 él fut össze)

Kérdés: van-e Hamilton-köre?

megjegyzés: Ha igen, akkor a Hamilton-utat már meg sem kell kérdezni, a definícióból adódóan egyértelmű, hogy ez esetben van Hamilton-út is a gráfban (ha létezik Hamilton-köre!)

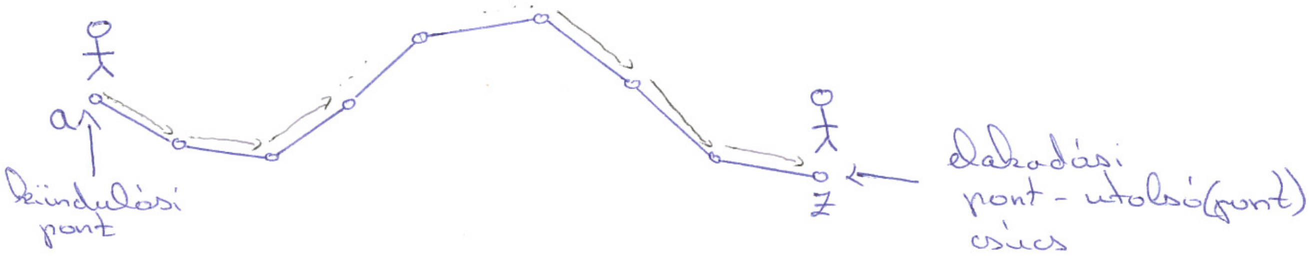
2. Példa



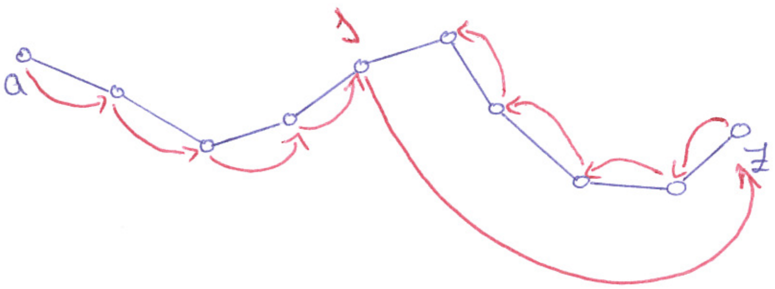
Hamilton-út, DE nincs Hamilton-köre
(mert ehhez az „x" csúcshoz kellene visszamennünk, amikor is a „t" csúcson 2-szer is át kell mennünk. ξ)

Cél: Adott G (egyszerű gráf - azaz nincs benne se hurok, se párhuzamos él) gráfban keressünk minél hosszabb utat.

„Mohó útnövelés" (előre nem gondolkodva) - sétálás, + minden lépésnél egy addig nem látogatott szomszédba lépünk. Ekkor lesz egy szükségszerű elakadás:



P út a → z-be



„z"-nek d db szomszédja van. Egyik az ábrán jelölt „s" szomszéd. A piros nyilak egy alternatív utat mutatnak. Ezt mindegyik szomszédra megtehetjük.

alternatív utak $\begin{cases} P_1 \\ \vdots \\ P_d \end{cases}$

megjegyzés: maga a P út is az alternatív utakhoz tartozik, hiszen ő is egy alternatív út.

Tulajdonságaik:

- ugyanazokat a csúcsokat járják be ⇒ hosszuk ugyanaz.
- mindegyik út „a"-ból indul, és mindegyik alternatíva egy út.
- utolsó pontjuk mind különböző (az utolsó pont az „s" szomszéd utáni pont).

Tétel: G egyszerű gráf minden csúcsának legalább $\frac{|V|}{2}$ szomszédja van. Ekkor G-ben van Hamilton-út.

Bizonyítás: Azt látjuk be, hogy P nem Hamilton-út, akkor P meghosszabbítható. Ebből adódik a tétel.

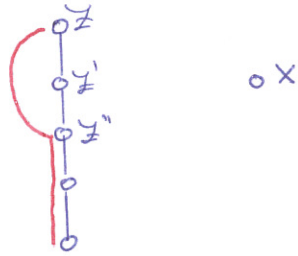
P „a"-ból „z"-be vezető út:

1. eset: Tehát, ha „mohó módon" hosszabbítható maga a gráf, akkor létezik benne Hamilton-út (lásd a fenti tétel alapján). Ekkor a tétel egyértelmű.

2. eset: Ha „mohó módon" nem hosszabbítható maga a gráf, akkor P elakad, mert „z" összes szomszédja P-re esik. „z"-nek legalább $\frac{|V|}{2}$ szomszédja van. Legalább $\frac{|V|}{2}$ db alternatív út van.

Példa: Legyen Z az alternatív utak utolsó pontjai által alkotott halmaz. Azaz Z azokat a csúcsokat tartalmazza, ahová alternatív úttal el tudunk jutni.

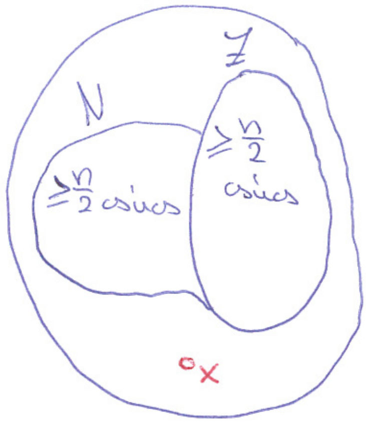
$Z = \{z, z', z''\}$



Tudjuk:
- van „x" csúcs P-n kívül (P nem Hamilton-út),
- „x"-nek $\geq \frac{|V|}{2}$ szomszédja van → halmazuk N (tehát „x"-be még nem sétáltunk át, és ezt szeretnénk).

- ha $k \in Z \cap N \Rightarrow$ alternatív P út „k"-ba ($k \in Z$) + egy lépés kell „x"-be ($k \in N$), ami egy P-nél hosszabb út és készen vagyunk.

- ilyen k-nak lennie kell:



$|V| = n$

$|N|, |Z| \geq \frac{n}{2}$

$x \notin Z,\ x \notin N \Rightarrow N \cap Z \neq \emptyset$

Tétel: G egyszerű gráf, minden csúcs foka $\geq \frac{n}{2}$. Ekkor G-ben van olyan P Hamilton-út, mely kezdő és utolsó csúcsa szomszédos.

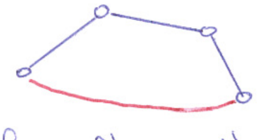
megjegyzés: Nem bizonyítjuk. A korábbiakból ugyanis tudjuk, hogy P Hamilton-út van gráfunkban. Az igazolható a korábbi módszerrel, hogy P egyik alternatív változata jó lesz.

Tétel: (Dirac-tétel): G egyszerű gráf, minden csúcs foka legalább $\geq \frac{n}{2}$, $n \neq 2$. Ekkor G-ben van Hamilton-kör (ez feltételezi, hogy van benne Hamilton-út is!).

- $n = 2$

- Hamilton-út van benne
- Hamilton-kör nincs!

- $n \neq 2$



- Hamilton-út van benne
- Hamilton-kör is van benne!

(Háttérinformáció: Dirac Gábor Endre (Gabriel Andrew Dirac)
magyar származású matematikus volt. A Nobel-díjas Paul Dirac
fizikus mostohafia, és a szintén Nobel-díjas magyar származású
Wigner Jenő fizikus unokaöccse. Dirac Gábor leginkább
gráfelmélettel foglalkozott. Az előbb említett, róla elnevezett
Dirac-tételt 1952-ben fogalmazta meg.)